

可交换平延在同时相似下的标准形

王琦¹, 王路群²

(1. 广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006; 2. 黑龙江大学 数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 设 F 是域, n 为正整数, $GL_n(F)$ 表示域 F 上的 n 级一般线性群, $T_{12}(1)$ 表示 $(1, 2)$ 位置元与所有对角元都是 1 而其余元为零的 $GL_n(F)$ 中元; $GL_n(F)$ 中与 $T_{12}(1)$ 相似的矩阵称为 F 上的 n 级平延. A, B 为两个平延, 当 A 与 B 可交换时, $\exists P \in GL_n(F)$, 使 $P^{-1}AP = T_{12}(1)$, $P^{-1}BP$ 可表为 4 种简单形式.

关键词: 平延; 中心化子; 相似; 标准形

中图分类号: O152.3

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2006)01-0127-07

YOU Hong, ZHENG Bao-Dong^[1] 于 2001 年 4 月提出了平延换位子的概念, 同一年, 王路群^[2] 在一般含 1 交换环上的线性群^[3] 中, 进一步确定了平延换位子的生成长度问题, 刻画了剩余数不小于 2 的平延换位子的形式, 2003 年, 生玉秋^[4] 讨论了域上辛平延^[5] 换位子的等价形式, 并对相互交换的辛平延换位子之积做了一定的探究, 由此可见, 平延在线性群的结构与同态研究中占有重要地位, 对平延在相似下的标准形的探讨也显得尤为必要. 由于一个平延在相似下的标准形是 $T_{12}(1)$, 如果给定多个平延, 那么它们在 $GL_n(F)$ 中同时相似于哪些矩阵是有一定意义的, 本文考虑两个可交换平延在同时相似下的标准形, 给出了一些相关结论.

1 平延的相关理论

设 F 是域, $n \in \mathbb{Z}^+$, $F^{n \times n}$ 表示 F 上 n 级矩阵全体, $GL_n(F)$ 为 F 上可逆矩阵的全体, $SL_n(F)$ 表示 $GL_n(F)$ 中所有行列式为 1 的矩阵的全体; $T_{12}(1)$ 表示 $(1, 2)$ 位置元与所有对角元都是 1 而其余元为零的 $GL_n(F)$ 中元; $GL_n(F)$ 中与 $T_{12}(1)$ 相似的矩阵称为 F 上的 n 级平延; 当 $A \in F^{n \times n}$, $B \in F^{n \times n}$ 时, 以 $A \dot{\vee} B$ 表示准对角阵

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

引理 1^[2] 设 $(T_{12}(1))$ 是 $T_{12}(1)$ 在 $GL_n(F)$ 中的中心化子, 则

$$(T_{12}(1)) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & V \\ 0 & x & 0 \\ 0 & U & W \end{pmatrix} \middle| x, y \in F, x \neq 0, V \in F^{1 \times (n-2)}, U \in F^{(n-2) \times 1}, W \in GL_{n-2}(F) \right\}.$$

引理 2 设 C 是 $T_{12}(1)$ 的中心化子, 则 $CT_{12}(1)C^{-1} = T_{12}(1)$.

引理 3 设 $A \in SL_n(F)$, 则 A 为平延 $\Leftrightarrow \text{rank}(A - I) = 1$.

收稿日期: 2005-03-18

作者简介: 王琦(1978), 男, 助教, 主要研究方向为典型群、微分方程稳定性.

证明 必要性 $\exists P \in GL_n(F)$, 使 $P^{-1}AP = T_{12}(1)$, 则

$$P^{-1}(A - I)P = T_{12}(1) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\text{rank}(A - I) = 1$.

充分性 由 $\text{rank}(A - I) = 1$ 得 $\exists P \in GL_n(F)$ 使

$$P(A - I)P^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ & 0 & \end{pmatrix},$$

即

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1+ & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

由 $|A| = 1$ 推出 $a_1 = 0$ 即

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a_2, \dots, a_n \text{ 不全为零,}$$

通过矩阵的初等变换, 总能使 $a_2 \neq 0$, 故置

$$Q = \begin{pmatrix} a_2^{-1} & -a_2^{-1}a_3 & \cdots & -a_2^{-1}a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & I_{n-2} & \end{pmatrix} = T_{12}(1),$$

令 $R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}$, $M = P^{-1}R \in GL_n(F)$, 有 $M^{-1}AM = T_{12}(1)$, 即 A 为平延, 证毕.

引理 4 与平延相似的矩阵仍为平延.

2 主要结果及其证明

定理 设 A, B 为平延, 且 $AB = BA$, 则 $\exists P \in GL_n(F)$, 使 $P^{-1}AP = T_{12}(1)$, $P^{-1}BP$ 可表为以下 4 种形式之一:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-2}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-3}, \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-3}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \mu & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-4}.$$

证明 $\exists P_1 \in GL_n(F)$, 使 $P_1^{-1}AP_1 = T_{12}(1)$, $P_1^{-1}BP_1 = C$, 其中 $C = (C_{ij})$.

有 $P_1^{-1}ABP_1 = T_{12}(1)C$, $P_1^{-1}BAP_1 = CT_{12}(1)$, 由于 $AB = BA$, 故 $T_{12}(1)C = CT_{12}(1)$.

由引理 1 知

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix},$$

由引理 4 知 C 为平延, 从而 $c_{11} = 1$, 否则, 若 $c_{11} \neq 1$ 有

$$C - I = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & * & \\ 0 & c_{n2} & & & \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} c_{11} - 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{11} - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & * - I_{n-2} & \\ 0 & c_{n2} & & & \end{pmatrix}.$$

由引理 3, $\exists k_2, k_3, \dots, k_n$, 使得

$$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{11} - 1 \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} c_{11} - 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{1n} \\ 0 \\ c_{3n} \\ \vdots \\ c_{nn} - 1 \end{pmatrix} = k_n \begin{pmatrix} c_{11} - 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

那么

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

从而 $c_{11} = 1$, 矛盾, 故

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix},$$

$$C-I = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & C_1 - I_{n-2} & \\ 0 & c_{n2} & & & \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } C_1 = \begin{pmatrix} c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

由 $\text{rank}(C-I) = 1$ 得 $\text{rank}(C_1 - I_{n-2}) \leq 1$, 即 $\text{rank}(C_1 - I_{n-2}) = 0$ 或 $\text{rank}(C_1 - I_{n-2}) = 1$.

1) 当 $\text{rank}(C_1 - I_{n-2}) = 0$ 时, 有 $C_1 = I_{n-2}$, 故

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad C-I = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

经 $\text{rank}(C-I) = 1$ 可推出 $c_{13} = \cdots = c_{1n} = 0$ 且 $c_{12}, c_{32}, \cdots, c_{n2}$ 不全为零, 或 $c_{32} = c_{42} = \cdots = c_{n2} = 0$ 且 $c_{12}, c_{13}, \cdots, c_{1n}$ 不全为零.

① 当 $c_{32} = c_{42} = \cdots = c_{n2} = 0$ 且 $c_{12}, c_{13}, \cdots, c_{1n}$ 不全为零时

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

若 $c_{12} \neq 0$; $c_{1i} = 0, i = 3, \cdots, n$, 则

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad x = c_{12} \neq 0.$$

此时令 $P_1 = P$, 有

$$P^{-1}AP = T_{12}(1), \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \dot{\vee} I_{n-2}.$$

若 $c_{12} = 0, c_{13}, \cdots, c_{1n}$ 不全为零, 那么通过行列对换(即以初等阵 P_{3i} 作共轭)总可以使 $c_{13} \neq 0$, 同时 $T_{12}(1)$ 不动, 于是存在

$$Q = \begin{pmatrix} c_{13}^{-1} & -c_{13}^{-1}c_{14} & \cdots & -c_{13}^{-1}c_{1n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

使

$$\begin{pmatrix} c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $P_2 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & Q \end{pmatrix}$, 有

$$P_2^{-1} C P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

且此时有 $P_2^{-1} T_{12}(1) P_2 = T_{12}(1)$. 再令 $P = P_1 P_2$, 有

$$P^{-1} A P = T_{12}(1), P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-3}.$$

②当 $c_{13} = \cdots = c_{1n} = 0$ 且 $c_{12}, c_{32}, \dots, c_{n2}$ 不全为零时, 由①同理有 $\exists P \in GL_n(F)$ 使

$$P^{-1} A P = T_{12}(1), P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-3}.$$

2) 当 $\text{rank}(C_1 - I_{n-2}) = 1$ 时, 由于

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & C_1 & \\ 0 & c_{n2} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C_1 & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} = |C_1|,$$

经引理3推出 C_1 为 $n-2$ 级平延, 则 $\exists Q \in GL_{n-2}(F)$, 使 $Q C_1 Q^{-1} = T_{12}(1)$, 于是

$$\begin{pmatrix} I_2 & \\ & Q \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I_2 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & *' \\ 0 & 1 & \\ & *'' & T_{12}(1) \end{pmatrix},$$

其中: 矩阵 $*$ 的第一列元素均为零, 矩阵 $*$ 的第二行元素均为零.

令 $P_2 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & Q \end{pmatrix}$, 易知 $P_2 T_{12}(1) P_2^{-1} = T_{12}(1)$.

设

$$G = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_3 & \cdots & c_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_3 & 1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ 0 & d_n & & & I_{n-4} \end{pmatrix},$$

则

$$G - I = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & d_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

由引理 4, G 为平延, 故 $\text{rank}(G - I) = 1$, 从而有

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \lambda = c_4, \mu = d_3,$$

记

$$Z = \begin{pmatrix} -\lambda & x_4 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

使

$$\begin{pmatrix} I_2 & Z \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} I_2 & -Z \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \mu & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $P_3 = \begin{pmatrix} I_2 & Z \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, 有

$$P_3 G P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \mu & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-4}, P_3 T_{12}(1) P_3^{-1} = T_{12}(1),$$

再令 $P = P_1 P_2^{-1} P_3^{-1}$, 有

$$P^{-1} A P = T_{12}(1), P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \mu & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \dot{Y} I_{n-4},$$

证毕.

3 结论

研究了两个可交换平延在同时相似下的标准形,给出了具体形式,为进一步研究提供了理论依据.

参考文献:

- [1] You Hong, Zheng Bao-dong. The elements of the special linear group $SL_n(F)$ as products of commutators of transvections [J]. *Advances in Mathematics*, 2001, 30(2): 133-140.
- [2] 王路群. 交换环上线性群的平延换位子[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2001, 18(3): 4-4.
- [3] 华罗庚, 万哲先. 典型群[M]. 上海: 上海科技出版社, 1962. 108-118.
- [4] 生玉秋. 域上的辛平延的换位子[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2003, 20(1): 8-13.
- [5] MEARA T O. Symplectic Groups[A]. *Math Surveys* 16[C]. Providence: Amer Math Soc, 1978: 4-33.

The Normalized Form of the Two Commutable Transvections under the Same Similarity

WANG Qi¹, WANG Li-qun²

(1. Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;

2. School of Mathematical Sciences, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: Let F be a field, and n be a positive integer, $GL_n(F)$ denotes the General Linear Group of degree n over F . A matrix A in $GL_n(F)$ is called a transvection if A is similar to $T_{12}(1)$ whose elements on $(1, 2)$ -position and principal diagonal are all 1 and 0 else. Let A and B be two transvections, a $P \in GL_n(F)$ exists, $P^{-1}AP = T_{12}(1)$, $P^{-1}B$ can be denoted with four simple forms if A and B are commutative.

Key words: transvection; centralizer; similitude; normalized form